DEVOIR NUMÉRO 2 VERSION A CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Remarques / Commentaires / erreurs fréquentes.

Stratégie générale, décryptage du sujet.

- Les probas doivent être bien plus investies, il est inenvisageable de faire l'impasse sur un thème tout entier.
- Penser à reprendre ce devoir en étudiant les questions les plus dures pour progresser.

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 1.

- La question **2** demande d'utiliser le théorème du point fixe. Ce théorème a des hypothèses ! En particulier la continuité de la fonction.
- La question **3.c** est plus délicate. Je rappelle qu'il n'existe pas de théorème de divergence monotone, et qu'une suite croissante et minorée n'est pas nécessairement convergente.
- Les télescopages se passent mal dans les copies les plus faibles.
- Il y a *deux* conditions pour montrer que certaines valeurs déterminent la loi d'une variable aléatoire : qu'elles soient positives et que leur somme fasse 1 (question **6.a**).
- La question **6.d** se traite efficacement en rappelant qu'une variable qui possède une variance possède automatiquement une espérance.

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 2.

- La partie A est particulièrement bien traitée.
- Attention cependant à la résolution des systèmes qui posent parfois problème.
- Personne ne s'est sorti de la question **3.d**.
- Il est interdit de citer le cours à la question **5.a** : le but était de retrouver le résultat.
- À la question **6.b**, il est indispensable de faire une récurrence *double* !

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 3.

- C'est un exercice un peu difficile, ne pas réussir la 1ère question pouvait être bloquant pour la suite. Il n'empêche que c'est une erreur de ne pas y passer du temps, surtout que, comme d'habitude en probas, l'exercice se transforme vers la fin en un exercice d'analyse avec des calculs assez simples.
- Les variables X_i ne sont pas des variables de référence (sinon on ne demanderait pas de *calculer* leur espérance et variance).
- Quelques erreurs de calculs de somme géométriques.

Date: 17 Octobre 2026 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

BARÈME ET EXIGENCES.

Exerice 1 : 28 points.

1. 2 points, question très classique et très basique.

2. 2 points, 1 pour appliquer correctement (avec toutes les hypothèses le théorème du point fixe), 1 pour résoudre l'équation de point fixe.

3. **a.** 2 points, c'est un cas simple où on peut donner le signe de $u_{n+1}-u_n$ tout de suite (c'est un carré) ; il n'y a pas besoin d'utiliser d'intervalle stable ici.

b. 1 point, c'est une conséquence directe de la question précédente.

c. 2 points, classique mais un peu délicat à rédiger, à faire impérativement par l'absurde.

4. 3 points, 2 points pour justifier le choix de la 2ème (règle de la somme obligatoire), 1 point pour discréditer les 3 autres brièvement.

5. **a.** 3 points, 1 pour l'existence (u_n ne vaut jamais 1) et 2 pour le calcul.

b. 2 points, le télescopage n'a pas à être excessivement détaillé.

c. 2 point, 1 pour la convergence, 1 pour la limite.

6. **a.** 2 points, 1 pour dire que les $\mathbb{P}(X=n)$ sont positifs, 1 pour dire que leur somme fait 1.

b. 2 points.

c. 3 points, par récurrence, 1 pour l'initialisation, 2 pour l'hérédité.

d. 2 points, argument de comparaison par majoration sans difficulté.

Exercice 2 : 49 points.

1. 2 points, il suffit de connaître la définition.

2. **a.** 3 points, 2 pour la linéarité, 1 pour dire que l'image de φ est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. 2 points, 1 pour le calcul de la trace de I, 1 pour la fin.

c. 2 points, c'est une application de la linéarité.

3. **a.** 4 points, 1 pour chaque colonne, 0 si A n'est pas une matrice 4×4.

b. 3 points, 1 pour le calcul, 1 pour en déduire l'inversibilité, 1 pour l'inverse.

c. 4 points, 2 pour chaque systèmes.

d. 3 points, dans quelques semaines, ça deviendra une question de cours, en attendant la résolution du système à paramètre n'est pas facile.

4. 3 points, 1 pour écrire $\varphi(M)$ sous la forme d'une matrice explicite, 2 pour l'identité.

5. **a.** 2 points, 1 pour le sens direct, 1 pour le sens réciproque et l'expression de l'inverse.

b. 2 points, on manipule le résultat précédent et la linéarité de φ.

6. **a.** 2 points, 1 pour chaque, il suffit d'appliquer la relation de récurrence.

b. 2 points, récurrence simple sur n.

7. **a.** 2 points.

b. 3 points, récurrence sur n, 1 pour l'initialisation, 2 pour l'hérédité.

c. 3 points, 1 pour appliquer la trace, 1 pour montrer que l'expression est polynômiale en la trace, 1 pour trouver ce polynôme en fonction des P_n.

8. **a.** 3 points si tout marche, 1 si tout est géré sauf le procédé de tampon.

b. 4 points, 1 pour écrire un programme ou un bout de programme qui calcule la trace d'une matrice, 3 pour fabriquer les coefficients a_n et en déduire les puissances de M.

Exercice 3 : 46 points.

1. 5 points en tout, 1 pour le dernier des 3 avec l'argument $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. 4 points, 2 pour la loi (1 pour $X_i(\Omega)$), 1 pour l'espérance, 1 pour la variance.

3. 1 point, $Y_1 = X_1$.

4. 3 points, l'étude de tous les cas pour $Y_2(\Omega)$ prend un peu de temps mais c'est facile.

5. **a.** 2 points, il suffit de faire la liste de ce qui peut se passer.

b. 2 points, on peut (doit ?) présenter les résultats dans un tableau.

c. 3 points, 1 pour montrer que c'est la formule des probas totales qui donne la stratégie générale, 2 pour en déduire les valeurs exactes de la loi.

6. **a.** 3 point, 1 pour la somme, 1 pour l'espérance par linéarité, 1 pour la variance par indépendance (0 si la linéarité et l'indépendance ne sont pas cités correctement pour chaque calcul).

b. 2 points, calcul simple mais qui demande d'avoir bien fait tout le reste.

7. **a.** 3 points, 2 pour bien justifier qu'il s'agit d'une géométrique (0 s'il manque des hypothèses), 1 pour en déduire la loi.

b. 2 points, 1 pour chaque, question de cours.

8. **a.** 1 point.

b. 3 points, 1 pour $T_2 = 1$, l'événement est simple à décrire, 2 pour $T_2 = 2$, l'événement est un peu plus complexe.

c. 3 points, question difficile, formule des probas totales avec $T_1 = k$ comme SCE ($k \in [\![1, +\infty[\![$).

d. 2 points, simple vérification pour chaque cas.

e. 3 points, le sujet impose bien sûr de faire le calcul. On manipule alors des sommes géométrique et géométrique dérivée.

f. 1 point, sa probabilité est le complémentaire de celle qu'on vient de calculer.

g. 3 points, encore un calcul de sommes géométriques.

Orthographe, présentation, lisibilité : 7 points.

Total : 130 points. Divisés par 4.5 pour faire une note sur 20 (32.5 points en tout).

Correction détaillée.

Correction 1

Pour une correction de l'EDHEC 2026, voir le lien https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EDHEC26cor.pdf

Correction 2

Pour une correction de l'EML 2026, voir le lien https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EML26cor.pdf

Correction 3

Pour une correction d'ECRICOME 2010, voir le lien https://louismerlin.fr/FTP/ECRICOME2010cor.pdf